

1. Определите отношение радиуса основания к высоте цилиндра, имеющего при данном объеме наименьшую полную поверхность.
2. Через точку $P\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ провести прямую так, чтобы сумма длин положительных отрезков, отсекаемых ею на координатных осях, была наименьшей.
3. По взаимно перпендикулярным улицам к перекрёстку движутся две машины со скоростями 30 км/ч и 40 км/ч. В некоторый момент времени они находятся на расстоянии 10 км от перекрёстка. Через какое время после этого расстояние между машинами станет наименьшим?
4. Точки A и B с абсциссами 2 и -2 расположены на параболе $y = \frac{1}{2}x^2$. Найдите на этой параболе точку, сумма квадратов расстояний которой до точек A и B была бы наименьшей.
5. Число 204 разложите на 3 слагаемых, так чтобы два из них относились как 1 : 7, а произведение трёх слагаемых было наибольшим.
6. Требуется изготовить ящик с крышкой, объём которого был бы равен 36 м^3 , стороны основания относились бы как 1 : 3. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность ящика была наименьшей?
7. Найдите радиус основания цилиндра наибольшего объёма, вписанного в шар радиуса R .
8. На гиперболе $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ найдите точку, ближайшую к точке $(3, 0)$.
9. На параболе $y = x^2$ найдите точку, ближайшую к точке $A\left(2, \frac{1}{2}\right)$.
10. Найдите наибольшую площадь прямоугольника, две вершины которого лежат на осях OX и OY прямоугольной системы координат, третья в точке $(0, 0)$, а четвёртая на параболе $y = 3 - x^2$.
11. Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точку $A(1, 2)$ и отсекающей от первого координатного угла треугольник наименьшей площади.

12. Найдите длину боковой стороны трапеции, имеющей наименьший периметр среди всех равнобедренных трапеций с заданной площадью S и углом α между боковой стороной и нижним основанием.
13. Найдите конус наибольшего объёма с данной образующей b .
14. Найдите высоту конуса наименьшего объёма, описанного около шара R .
15. Найдите высоту правильной треугольной призмы наибольшего объёма, вписанной в шар радиуса R .
16. Найдите стороны прямоугольника наибольшей площади, вписанного в эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ так, что стороны прямоугольника параллельны осям эллипса.
17. Найдите цилиндр наибольшего объёма, периметр осевого сечения которого равен a .
18. Найдите высоту конуса наибольшего объёма, вписанного в шар радиуса R .
19. Через какую точку эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ следует провести касательную, чтобы площадь треугольника, образованного этой касательной и положительными полуосями OX и OY , была наименьшей?
20. Найдите наибольшую полную поверхность цилиндра, вписанного в шар радиуса R .
21. Найдите наибольшую площадь трапеции, вписанной в полукруг радиуса R так, что нижним основанием трапеции служит диаметр полукруга.
22. Найдите наибольший объём цилиндра, полная поверхность которого равна S .
23. Найдите наибольшую полную поверхность цилиндра, вписанного в шар радиуса R .
24. Найдите высоту конуса наименьшего объёма, описанного около шара радиуса R .
25. В конус, радиус основания которого равен R , а высота H , вписан цилиндр наибольшего объёма. Найдите радиус основания и высоту этого цилиндра.

26. Проектируется судоходный канал, поперечное сечение которого – равнобедренная трапеция. Ширина канала по дну равна $2a$, глубина воды – h . Каким должен быть угол α наклона откоса канала, чтобы смоченный периметр (линия соприкосновения воды со стенками канала) его был наименьшим .
27. Ширина складского амбара 6 м, а длина 9 м, расстояние от чердачного перекрытия до конька равно 4,4 м. Нужно построить мансарду для хранения малогабаритного оборудования, поперечное сечение которой – прямоугольник. Каковы должны быть размеры поперечного сечения, чтобы его площадь была наибольшей? Приняв длину мансарды равной длине дома, вычислить её объём и площадь.
28. На каком расстоянии от горизонтальной плоскости рабочей поверхности следует поместить светильник, чтобы в фиксированной точке этой плоскости получить наибольшую освещённость? Освещённость E плоской поверхности, создаваемая точечным источником, определяется выражением $E = \frac{I \cos \alpha}{r^2}$, где I – сила света, r – расстояние до освещаемой поверхности, α – угол между направлением светового потока и нормалью к поверхности.
29. Корабль находится от точки А берега на расстоянии 3 км. С корабля отправлен гонец с донесением в штаб В, находящийся от точки А на расстоянии 10 км по берегу. Лодка движется со скоростью 4 км/ч, а гонец, выйдя из лодки, может пройти 5 км. К какому пункту берега должна пристать лодка, если донесение в штаб должно быть доставлено в кратчайшие сроки?
30. Две окружности расположены одна вне другой. Длина какого отрезка с концами на этих окружностях будет наибольшей (наименьшей)?
31. Имеется запас мёда в C рублей. Известно, что с течением времени стоимость мёда повышается по закону $V = Ce^{\sqrt{t}/2}$, а затраты на хранение настолько малы, что ими можно пренебречь. С другой стороны, если мёд продать, а деньги положить в банк, то на вырученную сумму непрерывно будут начисляться 10% годовых. Определить момент времени t_0 , в который наиболее выгодно продать имеющийся запас мёда и положить деньги в банк, чтобы через t лет сумма накоплений была максимальной.
32. В питательную среду вносят популяцию из 1000 бактерий. Численность популяции возрастает по закону $1000 + \frac{1000t}{100+t^2}$, t выражается в

часах. Найдите максимальный размер популяции и время по прошествии которого он будет достигнут.

33. (вставить данные) Рыбаку нужно переправиться с острова A на остров B . Чтобы пополнить свои запасы, он должен попасть на участок берега MN . Найти наикратчайший путь рыбака.
34. При подготовке к экзамену студент за t дней изучает $\frac{t}{t+k}$ -ю часть курса, а забывает αt -ю часть. Сколько дней нужно затратить на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса?
35. Тело массой m падает с высоты h и теряет массу (сгорает) пропорционально времени падения. Коэффициент пропорциональности равен k . Считая, что начальная скорость равна 0, ускорение g , и пренебрегая сопротивлением воздуха, найти наибольшую кинетическую энергию тела.
36. Профиль подъёма шоссе имеет форму кривой $y = \frac{x}{1+x}$. Определить наибольший угол наклона подъёма, если длина этого участка шоссе 500 м.
37. Из прямоугольного листа жести шириной a нужно изготовить желоб призматической формы так, чтобы его поперечное сечение имело наибольшую площадь, а ширина наклонной грани желоба составляла $a/3$.
38. При каких размерах квадратного бассейна данной вместимости V на облицовку стен и дна потребуется наименьшее количество материала? Найти площадь облицовочной поверхности.
39. Выбрать оптимальный объём q производства фирмой, функция прибыли которой может быть смоделирована зависимостью $P = \frac{x^3-1}{x^2}$.
40. Точка A движется согласно уравнениям $x_1 = 2t$, $y_1 = t$, а точка B – согласно уравнениям $x_2 = 10 - t$, $y_2 = 2t$ (x, y – в метрах, t – в секундах). Определите расстояние между этими точками в момент их максимального сближения. Оба движения происходят в одной плоскости. x_1, x_2, y_1, y_2 – координаты точек в прямоугольной системе координат в этой плоскости.
41. Тело массой m , находящееся на горизонтальной поверхности, испытывает действие постоянной по модулю силы F . Угол α между

вектором силы и горизонтом можно изменять. Определите максимально возможное ускорение тела. Коэффициент трения между телом и поверхностью равен μ .

42. С какой наименьшей скоростью надо бросить мяч, чтобы забросить его на крышу дома высотой H с расстояния S от дома?
43. Сечение оросительного канала имеет форму равнобокой трапеции, боковые стороны которой равны меньшему основанию. При каком угле наклона боковых сторон этой трапеции сечение канала будет иметь наибольшую площадь?
44. Известно, что прочность бруса с прямоугольным сечением пропорциональна его ширине и квадрату высоты. Найти размеры бруса наибольшей прочности, который можно вырезать из бревна радиусом $2\sqrt{3}$ дм.
45. Реакция организма на введённое лекарство может выражаться повышением кровяного давления, уменьшением температуры тела, изменением пульса и других физиологических показателей. Степень реакции зависит от назначенной дозы лекарства. Предположим, что x обозначает дозу назначенного лекарства, а степень реакции описывается функцией $y = x^2(a - x)$, где a – некоторая положительная постоянная. При какой дозе лекарства, реакция максимальна?
46. Газовая смесь состоит из окиси азота и кислорода. Требуется найти концентрацию кислорода x , при которой содержащаяся в смеси окись азота y окисляется с наибольшей скоростью. Будем считать, что скорость реакции окисляется определяется формулой $v = kx^2y$.